SOLUZIONE MATEMATICA GENERALE

03 - 09 - 2014

EX1 Integrale generale di $y' = x(2+\sin x)y^2$

(NB) $y=0$ è soluzione ed è integrale singolare

Per $y \neq 0$ $\quad \displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int x(2+\sin x)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + \int x \sin x \, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 - x\cos x + \sin x + c$$

da cui integrale generale: $\displaystyle y = \frac{1}{x\cos x - \sin x + x^2 + c}$

(NB) $y=0$ è integr. singolare perché non si può ottenere per alcun valore di c.

EX2 $f(x,y) = x^2y + xy^2$ vincolo $x+y=1$

è omogenea di grado 3; $f(tx,ty) = t^2x^2ty + txt^2y^2$

$$= t^3(x^2y + xy^2)$$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x+y-1)$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO $\quad x = \frac{1}{2}; \; y = \frac{1}{2}; \; \lambda = \frac{3}{4}$

$P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è di minimo relativo vincolato.

$\boxed{Ex3}$ $$\int_0^2 \left(1-\frac{2}{3}x^2\right) e^{-\frac{2-3x}{4}}\,dx =$$

applichiamo due volte integrazione per parti.

$$= \frac{4}{3}\left[-\frac{13}{27}e^{-2} + \frac{37}{27}e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$\boxed{Ex4}$ BASE per lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo:
$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+y=0 \\ -x+y-2z=0 \end{cases}$$

per Cramer poiché

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$ il sistema ammette autosoluzioni

perché $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ ne ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$

Troviamo spazio delle soluz. con le prime due equazioni

$$\begin{cases} x+2y=z \\ x+y=0 \end{cases}$$ dando un valore arbitrario a z, non nullo,

ad esempio $z=1$ si ha

$$\begin{cases} z=1 \\ x+2y=1 \\ x+y=0 \end{cases}$$ la cui soluzione è $(-1, 1, 1)$

lo spazio delle soluzioni generato dal

vettore è $\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

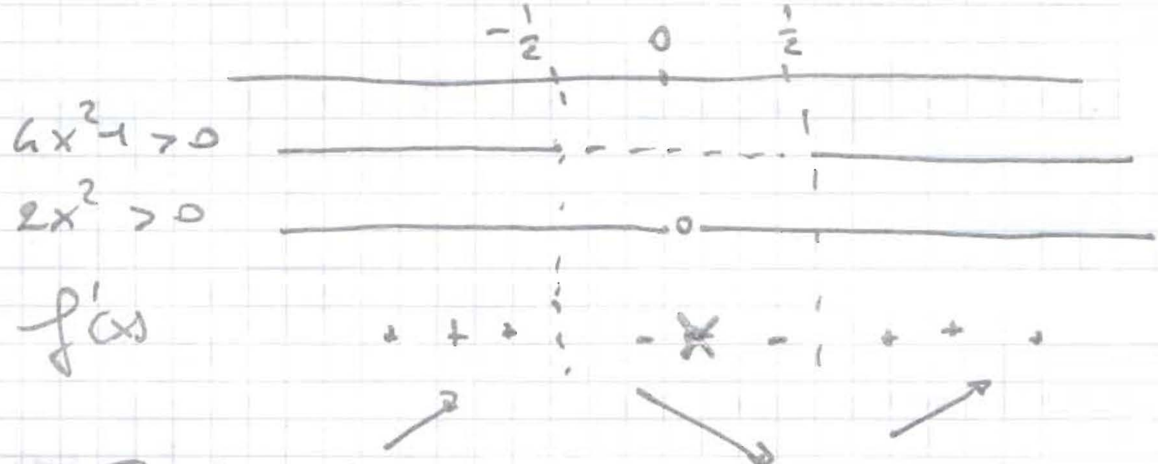
$\boxed{\text{Ex 5}}$ Dominio, intervallo di crescenza e quello di decrescenza di

- a) $y = \dfrac{4x^2+1}{2x}$ Dominio: $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

$y' = \dfrac{4x^2-1}{2x^2}$ studio segno di y'

$\dfrac{4x^2-1}{2x^2} > 0$: $4x^2-1>0 \rightarrow \left(x<-\frac{1}{2}\right) \cup \left(x>\frac{1}{2}\right)$

$2x^2>0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



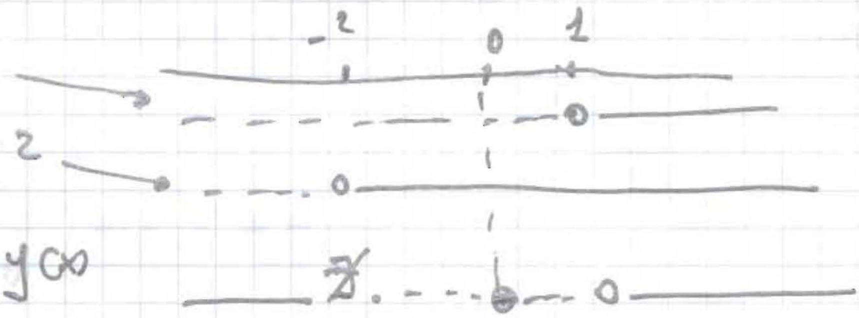
$f(x)$ crescente in $\left(x<-\frac{1}{2}\right) \cup \left(x>\frac{1}{2}\right)$

$f(x)$ decrescente in $\left(-\frac{1}{2}<x<0\right) \cup \left(0<x<\frac{1}{2}\right)$

- b) $y = \ln \dfrac{x-1}{x+2}$ Dominio $\dfrac{x-1}{x+2} > 0$

$x-1>0 \rightarrow x>1$

$x+2>0 \rightarrow x>-2$



Dominio: $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

$y' = \dfrac{3}{(x-1)(x+2)}$: il numeratore è sempre > 0 →

y' ha lo stesso segno del denominatore: $y'>0 \rightarrow (x-1)(x+2)>0$

cioè $(x<-2) \cup (x>1)$ (4)

Applicando la condiz. suff. per la funzione crescente:

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ crescente, $f(x)$ è crescente: $(x<-2) \cup (x>1)$

Questo intervallo coincide con il dominio della funzione

ergo questa non è MAI DECRESCENTE.

$\boxed{\text{Ex6}}$ Calcolare i limiti a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-4}-1}{x^2-25}$

per $x\to 5$ è forma $\frac{0}{0}$ e sono continue nell'intorno di $x=5$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-4}}$; $g'(x)=2x\neq 0$ per $x\neq 0$ applico l'Hospital

$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}{2x} = \dfrac{\frac{1}{2}}{10} = \dfrac{1}{20}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^2-2x}$ per $x\to+\infty$ NUM e DEN sono

continue e derivabili $\forall x \in \mathbb{R}$ quindi applico l'Hospital

$f'(x)=2e^{2x}$; $g'(x)=2x-2\neq 0$ per $x\neq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{2x}}{2x-2}$ è ancora forma $\frac{\infty}{\infty}$

deriviamo ancora

$f''(x)=4e^{2x}$; $g''(x)=2\neq 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \dfrac{4e^{2x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$