SOLUZIONE COMPITO A 17-06-2014 (A1)

MATEMATICA GENERALE

EX 1 $y(x) = \dfrac{e^{-x}}{x+1}$; DOMINIO: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$;

ASINTOTI: $\lim_{x \to -1^{\pm}} y(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -1$ è ASIN. VERT.

$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ ASIN. ORIZ. a $+\infty$, mentre

$\lim_{x \to -\infty} y(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{y(x)}{x} = +\infty$ $\nexists$ AS. OR. NÉ OBLIQ.

$y'(x) = -\dfrac{x+2}{(x+1)^2} \cdot e^{-x}$ quindi y è CRESCENTE $(-\infty, -2)$

y è DECRESCENTE IN $(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$

EX 2 $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 4x$ vincolo $x + y - 2 = 0$

$f(tx, ty) \neq t^{\alpha} f(x,y) \ \forall \alpha \Rightarrow$ NON E' OMOGENEA

$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(x+y-2)$

$$\begin{cases} L_x = 6x + 4 + \lambda = 0 \\ L_y = 4y + \lambda = 0 \\ L_\lambda = x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO

$P = \left(x = \dfrac{2}{5}; \ y = \dfrac{8}{5}; \ \lambda = -\dfrac{32}{5}\right)$

$H(x,y,\lambda)\big|_{(P)} \ldots = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -10 < 0$ risulta MIN VINCOLATO

MINIMO VINC.

Ex3

$$\int \frac{x^4+3x^2+1}{(2x+1)(x-1)}dx = \int \frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}+\frac{11}{8}\,dx + \int \frac{\frac{13}{8}+\frac{19}{8}}{(2x+1)(x+1)}dx$$

A2

$$= \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{8}+\frac{11}{8}x + \int \frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-1}\,dx =$$

$$\begin{cases} A+2B = \frac{13}{8} \\ B-A = \frac{19}{8} \end{cases}$$

DA CUI $A = -\frac{25}{24}$; $B = \frac{4}{3}$

$$= \frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{8}+\frac{11}{8}x - \frac{25}{24}\log|2x+1| + \frac{4}{3}\log|x-1| + c$$

Ex4

$$A = \begin{pmatrix} k & -2 & 0 \\ -3 & k & 0 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

for quali $k \in \mathbb{R}$ è SINGOLARE? CARATTERISTICA DI A

PER $k=1$ TROVARE A^{-1}

$$\det A = k(k^2-6) = 0$$

È SINGOLARE PER $k=0$; $k=\pm\sqrt{6}$

CARATTERISTICA A: $\begin{cases} =3 & \text{PER } k \neq 0, \pm\sqrt{6} \\ =2 & \forall k \end{cases}$

PER $k=2$ A^{-1}:

$$A_{(k=2)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A = -4 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

EX5 TROVARE LE SOLUZIONI AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$.

A3

$$\begin{cases} 3x + ky = 2 \\ x - y = k \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Per Rouché-Capelli il sistema ha soluzione $\iff rg A = rg B$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ 1 & -1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det B = k(k-8) = 0$

Quindi per $k \neq 0, 8$ $rg A \neq rg B$ (A ha al MAX rg 2!)

$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBILE

Per $k = 0$ $rg A = rg B = 2$ SOLUZIONE $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$

Per $k = 8$ $rg A = rg B = 2$ " $\begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$

EX6 DETERMINARE PUNTO A $\cap$ TRA RETTA S PASSANTE PER P e Q E LA RETTA $t \perp r$ PASSANTE PER PUNTO R

$P(-1, -5)$ $Q(0,0)$ $R(-1,-1)$ $r: x - 2y + 3 = 0$

SOLUZIONE $S: y = 5x$; $t: y = -2x - 3$

$A \equiv \left(-\frac{3}{7}, -\frac{15}{7}\right)$ che è $\cap$ TRA $\begin{cases} y = 5x \\ y = -2x - 3 \end{cases}$

SOLUZIONE COMPITO B 17-06-2014

B1

MATEMATICA GENERALE

EX1 $y = (2-x)e^{-\frac{1}{x}}$; DOMINIO $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

ASINTOTI: $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} y(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ AS. VER

$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = \mp\infty \Rightarrow \nexists$ AS. ORIZ.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right) e^{-\frac{1}{x}} = -1 = (m)$

$\lim_{x\to\pm\infty} y(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} (2-x)e^{-\frac{1}{x}} + x = = (q)$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(2e^{-\frac{1}{x}} + x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)\right) = \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} 2e^{-\frac{1}{x}}}_{=2} +$

$\underbrace{+ \lim_{x\to\pm\infty} x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right)}_{=1}$ SUCC. SCRIVERE $\frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$ e^-

FORMA APPARENTE INDETERMIN. $\frac{0}{0}$, APPLICO DE L'HOSPITAL

DERIVANDO RISPETTO A $\frac{1}{x}$ E OTTENGO LIMITE 1

AS. OBLIQUO $y = mx + q = -x + 3$ SIA A $\pm\infty$

$y'(x) = -\frac{(x+2)\;(x-1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

STUDIO CRESCENZA E DECRESCENZA DI $y(x)$

B2

$$y'(x) = -\frac{(x+2)(x-1)}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

RISULTA CRESCENTE ↗ in $(-2,0) \cup (0,1)$

MENTRE E' DECRESCENTE ↘ in $(-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$

$\boxed{EX2}$ $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 + 4x$ VINCOLO $x - y + 2 = 0$

$f(tx,ty) \neq t^\alpha f(x,y)$ NON E' OMOGENEA

$$L(x,y,\lambda) = 3x^2 - 2y^2 + 4x + \lambda(x - y + 2)$$

$$\begin{cases} L_x = 6x + 4 + \lambda = 0 \\ L_y = -4y - \lambda = 0 \\ L_\lambda = x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO

$(x = 2,\ y = 4;\ \lambda = -16)$

MINIMO VINCOLATO

$\boxed{EX3}$ $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx =$ DIVISIONE POLINOMI

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 & x^2 - 1 \\ \hline -x^3 \quad +x & x+3 \\ = 3x^2 + x & \\ -3x^2 \quad +3 & \\ \hline = +x + 3 & \end{array}$$

$$= \int x+3\,dx + \int \frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\,dx =$$

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{x+3}{(\ )(\ )}$$

$$(A+B)x + B - A = \cancel{x+}3$$

$$A = -1$$
$$B = 2$$

$$= \frac{(x+3)^2}{2} - \lg|x+1| + \lg(x-1)^2 + c$$

$$= \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{\lg(x-1)^2}{\lg|x-1|} + c$$

B_3

Ex4

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ -2 & k & 0 \\ 4 & -2 & k \end{pmatrix}$$

PER QUALI $k \in \mathbb{R}$ È SINGOLARE?

LA CARATTERISTICA DI A

PER $k = 1$ TROVARE A^{-1}

$\det A = k(k^2-2) = 0$

A È SINGOLARE PER $k=0$, $k = \pm\sqrt{2}$

LA CARATTERISTICA DI $A = 2$ PER $k=0$, $k = \pm\sqrt{2}$

PER $k \neq 0, \pm\sqrt{2}$ $\quad r_A = 3$

$$A(k=1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$

EX5 TROVARE LE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} kx + ky + \frac{z}{2} = k \\ 2x + 3z = 0 \\ x + \frac{5}{2}z = 1 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} k & k & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & k & \frac{1}{2} & k \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -2k \neq 0 \rightarrow k \neq 0$

$r_A = 2 \quad \forall k = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \neq 0$

$r_A = 3 \quad \forall k \neq 0 \quad \exists!$ soluz. $\quad \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2k}; 1\right)$

$k = 0 \quad r_B = 3 \quad$ SISTEMA INCOMPATIBILE

B4

$\boxed{\text{Ex 6}}$ DETERMINARE IL PUNTO A $\cap$ TRA RETTA s PASSANTE PER I PUNTI P e Q e LA RETTA $t \perp r$ E PASSANTE PER IL PUNTO R.

$$P(0,3) \quad Q(1,0) \quad R(1,1); \; r: y = \frac{1}{2}x - 3$$

SOLUZIONE $\quad s: 3x + y - 3 = 0; \quad t: x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} = 0$

PUNTO A DI INTERSEZIONE; $\quad A: (0,3)$