

Soluzione

Esercizio 1 (punti 4)

Dire per quali k reali i vettori di S sono linearmente indipendenti e quali k sono dipendenti, in questo ultimo caso esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri

$$S = \{(1, 0, -2, 0)(0, 2, -1, -1)(2, -k, 0, 4)\}$$

SOLUZIONE

I vettori di S risultano avere rango $p = \begin{cases} 2 & k = 8 & \text{Lin.Dip.} \\ 3 & k \neq 8 & \text{Lin.Indip.} \end{cases}$ per $k=8$ risulta $(2, -8, 0, 4) = 2(1, 0, -2, 0) + 4(0, 2, -1, -1)$

Esercizio 2 (punti 3)

Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2}$

SOLUZIONE

Carattere serie, con criterio rapporto non si decide, con il confronto si:

$$\sum_k \frac{k+1}{k^2}: \text{ scrivo } \frac{k+1}{k^2} = \frac{k}{k^2} + \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} > \frac{1}{k} \text{ quindi la serie diverge positivamente}$$

Esercizio 3 (punti 6)

Calcolare massimo e minimo vincolati della seguente funzione $f(x, y) = x^2 + 3xy - 5y^2$ con vincolo $g(x) = 2x + 3y - 6$

SOLUZIONE

La funzione $f(x, y) = x^2 + 3xy - 5y^2$ con vincolo lineare $2x + 3y - 6 = 0$ ha max vincolato $P(3, 0, -3)$

Esercizio 4 (punti 3)

Calcolare il seguente integrale $\int_2^3 \left(\frac{4x-3}{2x^2-3x} \right) dx$

SOLUZIONE

Il calcolo dell'integrale immediato: $\lg(2x^2 - 3x) \Big|_2^3 = \lg 9 - \lg 2 = \lg \frac{9}{2}$

Esercizio 5 (punti 6)

Trovare le soluzioni, al variare del parametro k reale, del seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 4x - 6y = -2 \\ -2x + ky = 1 \\ 6x - 9y = -k \end{cases}$$

SOLUZIONE

Rango matrice incompleta $p_A = \begin{cases} 1 & k = 3 \\ 2 & k \neq 3 \end{cases}$ rango matrice completa $p_B = \begin{cases} 1 & k = 3 \\ 3 & k \neq 3 \end{cases}$ quindi

per $k \neq 3$ il sistema è incompatibile, per $k = 3$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha \\ y = \alpha \quad \alpha \in R \end{cases}$$

Esercizio 6 (punti 6)

Studiare continuità e derivabilità della seguente funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

SOLUZIONE

Continuità: la funzione data risulta in $x=1$ continua a sinistra con $f(1) = \frac{1}{2}$, poichè

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \right) = \frac{1}{2} \text{ la funzione risulta continua nel punto } x=1.$$

Derivabilità: $f'(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ poichè $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 2) = 1 \text{ la funzione data è derivabile in } x=1 \text{ e si ha } f'(1) = 1;$$

NB la derivata seconda non è definita per $x=1$

Esercizio 7 (punti 4) (esercizi Preliminari al compito)

7.1 Scrivere equazione della retta passante per il punto (5,1) e perpendicolare alla retta di equazione $2x - 3y - 4 = 0$

7.2 Delle seguenti relazioni, indicare quella/e errata/e:

$$\text{a) } (ab)^{a+b} = a^a b^b; \text{ b) } \lg(a^x b^y) = xy(\lg a + \lg b); \text{ c) } x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}; \text{ d) } \lg \sqrt{x^2} = \frac{1}{2} \lg x^2$$

SOLUZIONE

$$7.1 \quad y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$$

7.2 le errate sono a) e b)

Soluzione

Esercizio 1 (punti 4)

Dire per quali k reali la matrice è invertibile e calcolare l'inversa per $k=0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3-k & -3 \\ -k & -2k & 3 \end{pmatrix}$

SOLUZIONE

La matrice è invertibile per $k \neq 1$; per $k = 0$ la matrice inversa risulta: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

Esercizio 2 (punti 3)

Studiare il carattere della seguente serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!}$

SOLUZIONE

Il carattere della serie a termini positivi risulta convergente: $\sum_k \frac{k+1}{k!}$ con il criterio del rapporto:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+2}{(k+1)^2} = 0$$

Esercizio 3 (punti 6)

Calcolare massimo e minimo vincolati della seguente funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ con vincolo $g(x) = x + y - 1$

SOLUZIONE

La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ con vincolo lineare $x + y - 1 = 0$ ha un minimo vincolato in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

Esercizio 4 (punti 3)

Calcolare il seguente integrale $\int_1^2 \left(\frac{-2x-5}{x^2+5x} \right) dx$

SOLUZIONE

Il calcolo dell'integrale immediato risulta $\int_1^2 \frac{-2x-5}{x^2+5x} dx = -\lg(x^2+5x) \Big|_1^2 = -\lg 14 + \lg 6 = \lg \frac{6}{14}$

Esercizio 5 (punti 6)

Trovare le soluzioni, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, del seguente sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ ky + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Si tratta di sistema lineare omogeneo, rango $p = \begin{cases} 2 & k = 0 \text{ oppure } 1 \\ 3 & k \neq 0 \text{ e } 1 \end{cases}$, per $k \neq 0 \text{ e } 1$ esiste solo soluzione banale $(x \ y \ z) = (0 \ 0 \ 0)$, per $k = 0$ esistono ∞^1 soluzioni $(x = \alpha; y = 0; z = 0)$; per $k = 1$ esistono ∞^1 soluzioni $(x = 0; y = -\alpha; z = \alpha)$.

Esercizio 6 (punti 6)

Studiare dominio, continuità e asintoti della seguente funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2}$

SOLUZIONE

Data la funzione $f(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x+2)^2}$: dominio: $x \neq -2$, As.Vert. $x = -2$, Asintoto orizzontale di equazione $y=2$; la funzione attraversa As. Orizz. In $x = -\frac{7}{10}$, nel suo dominio risulta continua

Esercizio 7 (punti 4) (esercizi Preliminari al compito)

7.1 Scrivere equazione della retta passante per il punto $(-1,3)$ e parallela alla retta di equazione $2x - 3y - 4 = 0$

7.2 Delle seguenti relazioni, indicare quelle errate:

$$\text{a) } x^y z^y = (xz)^{2y}; \text{ b) } x^{\frac{m+1}{m}} = x^m \sqrt{x}; \text{ c) } \lg(-3) = -\lg 3; \text{ d) } \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & d.1 \\ \pm x & d.2 \\ |x| & d.3 \end{cases}$$

SOLUZIONE

7.1 $y = \frac{2}{3}(x+1) + 3$

7.2 Sono errati a), c) d1), d2)