SOLUZIONE MATEMATICA GENERALE (1)

17-09-2014

$\boxed{\text{EX1}}$ Integrale generale di $y' = \frac{2x-1}{y}$ (variabili separabili)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{y} \rightarrow y\,dy = (2x-1)dx \rightarrow \int y\,dy = \int (2x-1)dx$$

$$\rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 - x + c \rightarrow y^2 = 2x^2 - 2x + c$$

integr. generale: $y = \pm\sqrt{2x^2 - 2x + c}$

$\boxed{\text{EX2}}$ Carattere e somma delle serie

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$ è serie geometrica di ragione $q = \frac{3}{7}$

perché $-1 < q < 1$ la serie converge.

La sua somma è: $S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3}{7}} = \frac{7}{4}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^4$ è serie geometrica convergente perché:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)^4 = \left(\frac{1}{2^4}\right)^n \quad \text{dove } q = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \in (-1, 1)$$

La somma è: $S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$

$\boxed{\text{EX3}}$ $\int \frac{2x^2+5x+1}{2x+1}dx$ perché grado NUM > grado DEN

si effettua la divisione $\frac{2x^2+5x+1}{2x+1} = x+2 - \frac{1}{2x+1}$

$$\int \frac{2x^2+5x+1}{2x+1}dx = \int x+2 - \frac{1}{2x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\log|2x+1| + c$$

$\boxed{EX4}$ Per quale $k \in \mathbb{R}$ ha autosoluzioni il sist. omog. (2

$$\begin{cases} (k+1)y + 7z = 0 \\ kz = 0 \\ 2kx + 3y + 21z = 0 \end{cases}$$

Per Cramer ha autosoluz. sse $\det\begin{pmatrix} 0 & k+1 & 7 \\ 0 & 0 & k \\ 2k & 3 & 21 \end{pmatrix} = 0$

$\det(\;) = 2k^2(k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ e $k_2 = -1$

Per $k_1 = 0$ il sistema diventa $\begin{cases} y + 7z = 0 \\ 3y + 21z = 0 \end{cases}$ equivalenti

il sistema si riduce a $y = -7z$ che ha soluz. $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -7z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$

lo spazio delle ∞^2 soluzioni può essere

rappresentato nella forma: $S = \{(x, -7z, z)\ x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

Per $k_2 = -1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} -7z = 0 \\ -z = 0 \\ -2x + 3y + 21z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -2x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2}{3}x \\ z = 0 \end{cases}$$

lo spazio delle ∞ soluzioni è: $S = \{(x, \frac{2}{3}x, 0)\ x \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{EX5}$ $y = x^2 \ln x$ D: $x > 0$; NON HA SIMMETRIE (CON ASSI)

$\cap$ asse y $\nexists$: $x = 0$ non è in dominio

$\cap$ asse x: $A(1,0)$; segno $f(x)$: $x^2 \ln x > 0$ per $x > 1$

limiti agli estremi; $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$ = FORMA IND. $0 \cdot \infty$

Applico Hospital: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$

Hospital: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$.

ASINTOTI

$\lim_{x\to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = +\infty \Rightarrow \nexists$ AS OBL

DERIVATA: $y' = x(2\ln x + 1)$

$y' = 0 : x(2\ln x+1) = 0$ | $x = 0$ NON ACCETTABILE

$2\ln x + 1 = 0 \to \ln x = -\frac{1}{2} \to$

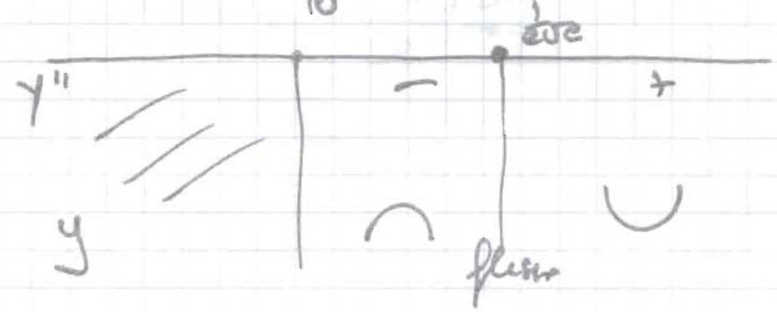
$\to x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ UNICO PTO STAZ.

$y' > 0 \to x > 0$ e $x > \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ è PNTO MIN. con MINIMO $y = -\frac{1}{2e}$

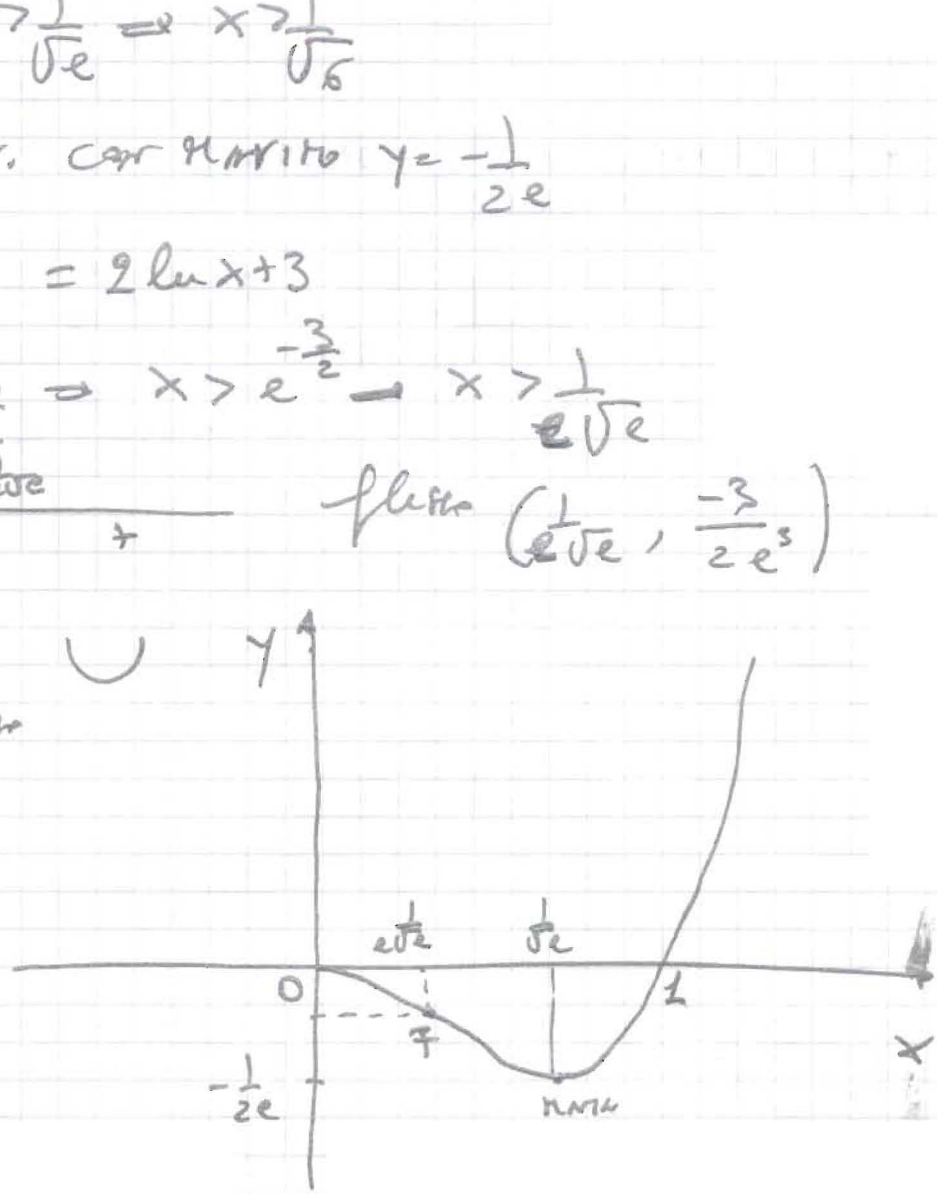
$y'' = 2\ln x + 1 + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3$

$y'' > 0 \to \ln x > -\frac{3}{2} \to x > e^{-\frac{3}{2}} \to x > \frac{1}{e\sqrt{e}}$



flesso $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \frac{-3}{2e^3}\right)$

GRAFICO f(x)



$\boxed{EX6}$ Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ FORMA $0 \cdot \infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ FORMA $\frac{\infty}{\infty}$ APPLICO HOSPITAL

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$

b) $\lim_{x \to 0} (1-x)^{\frac{1}{x}}$ FORMA 1^{∞} la scrivo come

$\lim_{x \to 0} e^{\ln(1-x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1-x)} =$

$= e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1-x)}$ STUDIAMO: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1-x) =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} \overset{\text{Hospital}}{=} \lim_{x \to 0} -\frac{1}{1-x} = -1$

quindi: $e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1-x)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$