Precorso di Matematica

M. Castellani

Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica
marco.castellani@univaq.it

18-26 settembre 2013

I numeri

I numeri naturali

I *numeri naturali* sono quelli che ci permettono di contare:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Operazioni: addizione $+$, moltiplicazione $\cdot$ che verificano:

- proprietà commutativa, associativa, distributiva
- esistenza dell'elemento neutro 0 per la somma:

$$x + 0 = x, \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

- esistenza dell'elemento neutro 1 per il prodotto:

$$x \cdot 1 = x, \qquad \forall x \in \mathbb{N}$$

- ordinamento totale cioè

$$\forall x, y \in \mathbb{N} \text{ con } x \neq y, \text{ si ha } x < y \text{ oppure } x > y.$$

I numeri

I numeri naturali

Le operazioni di addizione e di moltiplicazione tra numeri naturali non verificano le seguenti due proprietà:

- esistenza dell'opposto di un numero cioè:

$$\forall x \in \mathbb{N} \text{ con } x \neq 0,\ \nexists y \in \mathbb{N} \text{ tale che } x + y = 0$$

- esistenza dell'inverso di un numero cioè:

$$\forall x \in \mathbb{N} \text{ con } x \neq 1,\ \nexists y \in \mathbb{N} \text{ tale che } x \cdot y = 1$$

In altre parole, in $\mathbb{N}$ non si possono risolvere le equazioni:

$$x + 5 = 3 \qquad \text{e} \qquad 2x = 7$$

Attenzione! Per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha $x \cdot 0 = 0$ infatti

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

I numeri

I numeri interi

Per risolvere la prima equazione si allarga $\mathbb{N}$ all'insieme

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

dei *numeri interi* (che si ottengono aggiungendo gli opposti di ogni numero naturale, eccetto 0). Le operazioni di addizione e moltiplicazione verificano le stesse proprietà di prima con l'aggiunta

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \exists y \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x + y = 0$$

Il numero y si indica $-x$ e si chiama *opposto* di x.

Osservazione

"meno per meno fa più" perché, grazie alla proprietà distributiva,

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)\cdot 0 = (-1)\cdot[1+(-1)] = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) \\ &= -1 + (-1)\cdot(-1). \end{aligned}$$

I numeri

I numeri razionali

Purtroppo la moltiplicazione tra numeri interi continua a non verificare la proprietà dell'esistenza dell'inverso cioè:

$$\forall x \in \mathbb{Z} \text{ con } x \neq \pm 1, \ \nexists y \in \mathbb{Z} \text{ tale che } x \cdot y = 1$$

Per risolvere la seconda equazione si allarga l'insieme $\mathbb{Z}$ all'insieme dei *numeri razionali*

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

I numeri razionali si definiscono a partire dai numeri interi prendendo tutti i possibili rapporti con denominatore non nullo. Le operazioni di addizione e moltiplicazione verificano le proprietà dei numeri naturali ed inoltre

- ogni razionale ammette opposto,
- ogni razionale non nullo ammette inverso.

I numeri

Incommensurabilità tra lunghezze

Con i numeri razionali possiamo misurare le lunghezze degli oggetti fissando un'unità di misura ……ma purtroppo non tutte le lunghezze si possono esprimere attraverso numeri razionali!
Scegliendo come unità di riferimento il lato del quadrato non è possibile misurarne la diagonale. Supposto che il quadrato abbia lato unitario dimostriamo che la lunghezza della diagonale x non è un numero razionale.

Teorema (Irrazionalità di $\sqrt{2}$)

La lunghezza x della diagonale di un quadrato unitario non è un numero razionale (cioè $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Dal punto di vista algebrico, l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ significa che

$$x^2 - 2 = 0$$

non ha soluzioni razionali. I numeri razionali hanno due possibili rappresentazioni decimali

- *rappresentazione decimale finita*

$$\frac{13}{5} = 2,6 \qquad \frac{7}{2} = 3,5 \qquad \frac{3}{4} = 0,75$$

- *rappresentazione decimale illimitata periodica*

$$\frac{2}{3} = 0,66666\ldots = 0,\overline{6} \qquad \frac{12}{11} = 1,090909\ldots = 1,\overline{09}$$

L'insieme formato dai numeri razionali e quelli "irrazionali" (cioè quelli la cui rappresentazione decimale è illimitata ma non periodica) prende il nome di insiemi dei *numeri reali* ed è indicato con $\mathbb{R}$.

L'insieme $\mathbb{R}$ coincide con l'insieme delle lunghezze (con segno) di tutti i possibili segmenti.

Abbiamo ottenuto la seguente catena di inclusioni

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

In realtà l'insieme dei numeri reali non sono ancora sufficienti per risolvere i problemi algebrici. L'ultima estensione è quella dei numeri complessi $\mathbb{C}$ che non tratteremo.

I numeri

Metrica su $\mathbb{R}$

I numeri reali $\mathbb{R}$ vengono rappresentati sulla retta orientata: ad ogni $x \in \mathbb{R}$ corrisponde il segmento orientato avente per estremi 0 ed x.

Il *valore assoluto* di $x \in \mathbb{R}$ è

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e rappresenta la distanza di x dall'origine cioè la lunghezza del segmento $\overline{0x}$. La *distanza* tra due numeri $x, y \in \mathbb{R}$ è

$$d(x, y) = |x - y|$$

I numeri

Densità di $\mathbb{Q}$

L'*intorno circolare* di centro $x \in \mathbb{R}$ e raggio $r > 0$ è l'insieme dei punti la cui distanza da x è inferiore a r; cioè

$$\begin{aligned} I(x,r) &= \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < r\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : x-r < y < x+r\} \\ &= (x-r, x+r) \end{aligned}$$

Sebbene i numeri razionali siano assai meno dei numeri reali, possiamo approssimare qualsiasi numero (lunghezza) reale con un numero (lunghezza) razionale.

Teorema (Densità di $\mathbb{Q}$)

L'insieme dei razionali è denso nei reali cioè

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists q \in \mathbb{Q} \ : \ |x-q| < \varepsilon.$$

I numeri

Intervalli

Un *intervallo* è un insieme $I \subset \mathbb{R}$ per cui presi a caso due punti $x, y \in I$ tutto il segmento che li unisce è contenuto in I. Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$ aperto e limitato,
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\}$ chiuso e limitato,
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leq b\}$ aperto a sinistra e limitato,
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}$ aperto a destra e limitato,
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x\}$ aperto e illimitato,
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x\}$ chiuso e illimitato,
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leq b\}$ chiuso e illimitato,
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < b\}$ aperto e illimitato,
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$,
- Decimo ed ultimo intervallo è l'insieme vuoto $\emptyset$. Perché?

Per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ (x si chiama dividendo e y divisore) esistono, e sono unici, due numeri $q, r \in \mathbb{N}$ con $r < y$ tali che

$$x = q \cdot y + r$$

Il numero q prende il nome di *quoziente* mentre r si chiama *resto*. Quindi la frazione $\frac{x}{y}$ si può riscrivere

$$\frac{x}{y} = q + \frac{r}{y}.$$

Se $r = 0$ si dice che y è un fattore di x e $x = q \cdot y$ prende il nome di *fattorizzazione* di x.

- Un *monomio* è un'espressione in cui compaiono numeri reali e lettere moltiplicati tra loro. Il coefficiente numerico di un monomio è dato dal prodotto dei numeri incluso il segno, mentre la parte letterale è data dal prodotto delle lettere. Si dice *grado di un monomio* la somma degli esponenti di tutte le lettere che costituiscono la parte letterale. Due monomi si dicono *simili* se hanno la stessa parte letterale.

- Un *monomio* è un'espressione in cui compaiono numeri reali e lettere moltiplicati tra loro. Il coefficiente numerico di un monomio è dato dal prodotto dei numeri incluso il segno, mentre la parte letterale è data dal prodotto delle lettere. Si dice *grado di un monomio* la somma degli esponenti di tutte le lettere che costituiscono la parte letterale. Due monomi si dicono *simili* se hanno la stessa parte letterale.
- Un *polinomio* è un'espressione formata dalla somma algebrica di monomi (non simili). Si dice *grado di un polinomio* il massimo tra i gradi dei monomi che lo formano.

Calcolo letterale

Operazioni algebriche tra polinomi

- Somma e prodotto tra polinomi. Prodotti particolari
  - quadrato di un binomio:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

  - quadrato di un trinomio:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

  - cubo di un binomio:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

  - differenza di quadrati

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

  - somma di cubi

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

  - differenza di cubi

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Polinomi in una variabile

Divisione tra polinomi

Un polinomio in una variabile di grado n è

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Il polinomio si dice *monico* se $a_n = 1$.

- Per ogni coppia di polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ esistono, e sono unici, due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ con $\deg r < \deg p_2$ tali che

$$p_1(x) = q(x) \cdot p_2(x) + r(x).$$

Polinomi in una variabile

Divisione tra polinomi

Un polinomio in una variabile di grado n è

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Il polinomio si dice *monico* se $a_n = 1$.

- Per ogni coppia di polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ esistono, e sono unici, due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ con $\deg r < \deg p_2$ tali che
$$p_1(x) = q(x) \cdot p_2(x) + r(x).$$
- Cosa succede se $p_2(x)$ è un polinomio monico di primo grado del tipo $p_2(x) = x - k$? Vale il seguente risultato

Teorema

Il polinomio resto $r(x)$ è sempre un numero uguale al valore assunto dal polinomio $p_1(x)$ in k cioè $p_1(k)$. Se $r = 0$ il numero k si dice zero del polinomio $p_1(x)$.

Equazioni e disequazioni in una variabile

Introduzione

Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ due opportune espressioni nella variabile x (per noi, per ora, due polinomi). Risolvere l'equazione

$$\alpha(x) = \beta(x)$$

vuol dire determinare per quali valori di x la quantità $\alpha(x)$ coincide con la quantità $\beta(x)$. Come risolvere un'equazione?

- Si determina il campo di esistenza.
- Si utilizzano i seguenti principi di equivalenza:
  1. aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione una stessa quantità, si ottiene un'equazione equivalente all'equazione di partenza,
  2. moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per una stessa quantità diversa da zero, si ottiene un'equazione equivalente all'equazione di partenza.
- Si adoperano opportune tecniche che vedremo in seguito.

Equazioni e disequazioni in una variabile

Introduzione

Siano $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ due opportune espressioni nella variabile x (per noi, per ora, due polinomi). Risolvere la disequazione

$$\alpha(x) \clubsuit \beta(x)$$

vuol dire determinare per quali valori di x la quantità $\alpha(x)$ risulta $\clubsuit$ rispetto alla quantità $\beta(x)$. Il simbolo $\clubsuit$ può essere: $>$ oppure $<$. Una disequazione si risolve usando le stesse regole delle equazioni eccetto il secondo principio di equivalenza che diventa:

- *moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità strettamente positiva, si ottiene una disequazione equivalente alla disequazione di partenza,*
- *moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità strettamente negativa, si ottiene una disequazione equivalente alla disequazione di partenza ma con il verso della disequazione invertito.*

Altri tipi di disequazioni

- $\alpha(x) \geq \beta(x)$: vuol dire risolvere sia l'equazione $\alpha(x) = \beta(x)$ che la disequazione $\alpha(x) > \beta(x)$,
- $\alpha(x) \leq \beta(x)$: vuol dire risolvere sia l'equazione $\alpha(x) = \beta(x)$ che la disequazione $\alpha(x) < \beta(x)$,
- $\alpha(x) \neq \beta(x)$: vuol dire determinare tutti i numeri che non risolvono l'equazione $\alpha(x) = \beta(x)$.

Quindi le prime due sono sia un'equazione che una disequazione, mentre la terza corrisponde ad un'equazione.

Ma secondo voi quali delle seguenti relazioni sono vere e quali false

- $7 \geq 7$
- $8 \geq 4$
- $7 > 7$

Equazioni e disequazioni polinomiali

Introduzione

Ogni equazione (o disequazione) si può sempre ricondurre alla forma canonica

$$p(x) = 0 \quad oppure \quad p(x) \clubsuit 0.$$

A seconda di cosa è $p(x)$ ci possono essere formule risolutive.

- $p(x)$ è di primo grado $p(x) = ax + b$:-)
- $p(x)$ è di secondo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$:-)
- $p(x)$ è di terzo grado $p(x) = a^3x + bx^2 + cx + d$:-|
- $p(x)$ è di quarto grado $p(x) = a^4x + bx^3 + cx^2 + dx + e$:-|
- $p(x)$ è di grado superiore al quarto :-(

Equazioni e disequazioni di primo grado

Formule

- Equazione $ax + b = 0$: grazie ai due principi la soluzione è

$$x = -\frac{b}{a}$$

- Disequazione $ax + b > 0$: grazie ai due principi la soluzione è
  - $x > -\frac{b}{a}$ se $a > 0$,
  - $x < -\frac{b}{a}$ se $a < 0$.
- Disequazione $ax + b < 0$: grazie ai due principi la soluzione è
  - $x < -\frac{b}{a}$ se $a > 0$,
  - $x > -\frac{b}{a}$ se $a < 0$.

Equazioni di secondo grado
Formule

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- Si calcola il discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- A seconda del segno di Δ abbiamo tre diversi casi:
  - se $\Delta > 0$ abbiamo due soluzioni (distinte)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  - se $\Delta = 0$ abbiamo una sola soluzione (con molteplicità 2)

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

  - se $\Delta < 0$ non abbiamo soluzioni (reali).

Equazioni di secondo grado
Formule

Ricordiamo le seguenti proprietà verificate se $\Delta \geq 0$.

- *Se x_1 e x_2 sono le due soluzioni (con $x_1 = x_2$ se $\Delta = 0$) allora*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- *La somma delle soluzioni è*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

mentre il prodotto delle soluzioni è

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Disequazioni di secondo grado

Formule

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0$$

Si calcolano le soluzioni dell'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

e quindi si presenteranno tre casi a seconda del Δ

- Se $\Delta > 0$ l'equazione associata ha due soluzioni distinte $x_1 < x_2$ che determinano un intervallo limitato (x_1, x_2); quindi
  - se $a > 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ è strettamente positivo all'esterno dell'intervallo (x_1, x_2) e strettamente negativo all'interno,
  - se $a < 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ è strettamente positivo all'interno dell'intervallo (x_1, x_2) e strettamente negativo all'esterno.

Disequazioni di secondo grado
Formule

- Se $\Delta = 0$ l'equazione associata ha una sola soluzione x_0 (con molteplicità 2); quindi
  - se $a > 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ è strettamente positivo in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ e non è mai strettamente negativo,
  - se $a < 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ non è mai strettamente positivo ed è strettamente negativo in $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Se $\Delta < 0$ l'equazione associata non ha soluzione; quindi
  - se $a > 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ è sempre strettamente positivo e non è mai strettamente negativo,
  - se $a < 0$ il polinomio $ax^2 + bx + c$ non è mai strettamente positivo ed è sempre strettamente negativo.

Regola mnemonica del DICE:

DiscordiInterniConcordiEsterni

Disequazioni di secondo grado

Formule

Quando si risolve la disequazione

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

si devono prendere sia le soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sia le soluzioni della disequazione

$$ax^2 + bx + c > 0$$

Equazioni di terzo e quarto grado

Nessuna formula da imparare!

Le formule per le risoluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado furono pubblicate nel 1545 da *Gerolamo Cardano* nel libro *Ars Magna* anche se lui non è il vero scopritore:

- La formula per le equazioni di terzo grado fu scoperta da *Nicolò Tartaglia* (o *Scipione del Ferro*): se abbiamo l'equazione

  $$x^3 + px = q$$

  le soluzioni sono tutte e sole del tipo

  $$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

- La formula per quelle di quarto grado fu di *Ludovico Ferrari*.

Tuttavia necessitano della conoscenza dei numeri complessi!!!!

Equazioni di grado superiore al quarto

Non esistono formule!

Nel 1824 il norvegese *Niels Abel* dimostrò che

. . . non vi può essere nessuna formula generale, espressa in termini di operazioni algebriche da effettuare sui coefficienti di un'equazione polinomiale, che permetta di trovare le soluzioni dell'equazione, se il grado di questa è superiore al quarto.

Tuttavia *Friedrich Gauss* aveva dimostrato nel 1799 il seguente risultato.

Teorema (fondamentale dell'algebra)

Un'equazione polinomiale di grado n ha esattamente n soluzioni (contate con la loro molteplicità) all'interno del campo dei numeri complessi. In particolare il numero delle soluzioni complesse non reali è sempre pari.

Teorema

Supponiamo di avere un'equazione polinomiale di grado n

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

a coefficienti interi. Allora tutte e sole le possibili soluzioni razionali dell'equazione saranno frazioni del tipo $\pm\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ tali che

- *p divide a_0,*
- *q divide a_n.*

Strategia per polinomi di grado superiore al secondo: si individuano le possibili soluzioni in $\mathbb{Q}$. Se $\frac{p}{q}$ è una soluzione si effettua la divisione con Ruffini e si ripete il ragionamento sul quoziente ottenuto (se è ancora di grado superiore al secondo).

Fattorizzazione di polinomi

Parte seconda

Come conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra si ha che ogni polinomio $p(x)$ si può scrivere "in maniera unica" come prodotto di binomi di primo grado e polinomi di secondo grado con $\Delta < 0$ cioè

$$a_n(x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k} \cdot (x^2 + r_1 x + s_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2 + r_h x + s_h)^{\beta_h}$$

dove

- x_i sono gli zeri di p con molteplicità α_i
- $x^2 + r_j x + s_j$ hanno $\Delta < 0$
- $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k + 2(\beta_1 + \ldots + \beta_k) = n$

Abbiamo ottenuto la fattorizzazione di un polinomio (in $\mathbb{R}$)

Disequazioni di grado superiore al secondo

Regola dei segni

La strategia per risolvere la disequazione

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \clubsuit 0$$

è la seguente:

- si effettua la fattorizzazione del polinomio in prodotto di polinomi di primo e secondo grado,
- si studiano i segni dei singoli fattori,
- si utilizza la regola dei segni costruendosi un'apposita tabella.

La stessa strategia vale per le disequazioni fratte cioè del tipo

$$\frac{p(x)}{q(x)} \clubsuit 0$$

tenendo presente il campo di esistenza (non si può dividere per 0)

Esercizi

Tutto sulle equazioni con polinomi!

Equazioni e disequazioni polinomiali

- $6x^2 + 7x - 5 \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $<$,
- $8x^4 - 2x^2 \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $\geq$
- $(x-1)(x^2-4)(x^2-5x+6) \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $\leq$
- $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $>$

Equazioni e disequazioni fratte

- $\dfrac{x^2-3x-28}{2x-1} \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $<$,
- $\dfrac{(x-1)(x^2-5)}{2x^2-3x-2} \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $\geq$
- $\dfrac{5x^2-x^3}{x^2-7x+10} \spadesuit 0$ dove $\spadesuit$ è sia $=$ sia $>$

Se $x \neq y$ allora non è detto che $x^2 \neq y^2$.
Ad esempio $3 \neq -3$ ma $(3)^2 = (-3)^2$.

L'elevamento al quadrato <u>non è</u> un'operazione iniettiva!

Tuttavia se $x \neq y$ e sia x che y sono positivi allora sicuramente $x^2 \neq y^2$.

L'elevamento al quadrato <u>è</u> un'operazione iniettiva relativamente ai numeri positivi!

Invece se $x \neq y$ allora sicuramente $x^3 \neq y^3$.

L'elevamento al cubo <u>è</u> un'operazione iniettiva!

Equazioni e disequazioni irrazionali

Osservazioni generali

Se $x > y$ allora non è detto che $x^2 > y^2$.
Ad esempio $2 > -3$ ma $(2)^2 \not> (-3)^2$.

L'elevamento al quadrato <u>non è</u> un'operazione monotona crescente!

Tuttavia se $x > y$ e sia x che y sono positivi allora sicuramente $x^2 > y^2$.

L'elevamento al quadrato <u>è</u> un'operazione monotona crescente relativamente ai numeri positivi!

Invece se $x > y$ allora sicuramente $x^3 > y^3$.

L'elevamento al cubo <u>è</u> un'operazione monotona crescente!

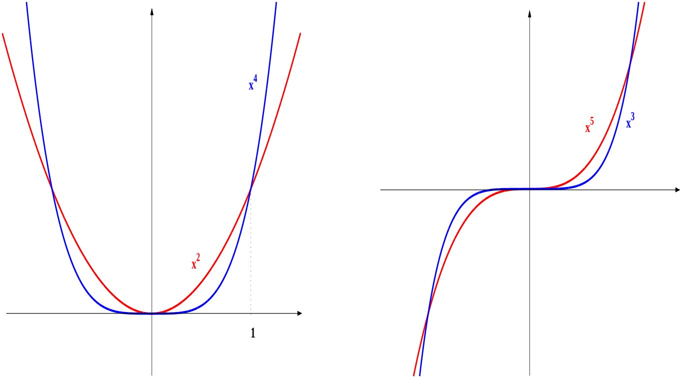


Figura: Grafici di funzioni monomiali: pari e dispari (invertire x^3 con x^5)

Equazioni e disequazioni irrazionali

Grafici delle funzioni radicali

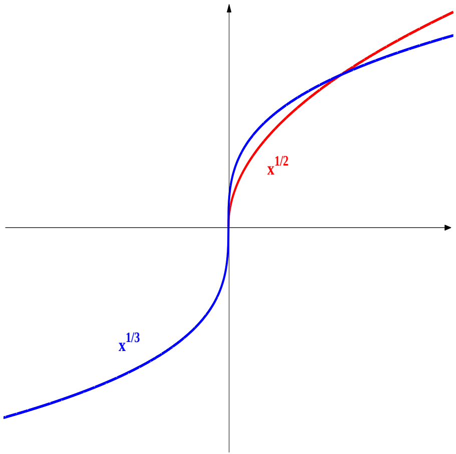


Figura: Grafici di funzioni radicali, $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$

Equazione con una sola radice

$$\sqrt[n]{\alpha(x)} = \beta(x)$$

- Individuare il campo di esistenza:
  - se l'indice n è pari, l'argomento della radice deve essere ≥ 0,
  - se l'indice n è dispari l'argomento della radice può essere qualsiasi.
- Eliminare la radice elevando alla n ambo i membri dell'equazione ma ricordandosi che
  - se l'indice n è pari, si deve imporre $\beta(x) \geq 0$,
  - se l'indice n è dispari non si deve prestare alcuna attenzione.

Ricapitolando

$$n \text{ pari:} \quad \begin{cases} \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \\ \alpha(x) = [\beta(x)]^n \end{cases} \qquad n \text{ dispari:} \quad \alpha(x) = [\beta(x)]^n$$

Disequazioni irrazionali

Strategia

Disequazione con una sola radice

$$\sqrt[n]{\alpha(x)} \clubsuit \beta(x)$$

con $\clubsuit$ che può essere sia $>$ che $<$.

Se n è dispari si eleva alla n; se n è pari ci sono due casi.

- $\sqrt[n]{\alpha(x)} < \beta(x)$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \\ \alpha(x) < [\beta(x)]^n \end{cases}$$

- $\sqrt[n]{\alpha(x)} > \beta(x)$ equivale all'unione di due sistemi

$$\begin{cases} \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) < 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} \alpha(x) \geq 0 \\ \beta(x) \geq 0 \\ \alpha(x) > [\beta(x)]^n \end{cases}$$

Esercizi

Tutto sulle disequazioni irrazionali!

Quelle che hanno un solo radicale

- $\sqrt{x^2+3x} \leq 2$
- $\sqrt{2x^2-1} \geq -2x-1$
- $\sqrt{x^2+x} < x+2$
- $\sqrt[3]{x^2-28}+3 > 0$

e quelle "famole strane"

- $\sqrt{x^2+4} > \sqrt{6x-x^2}$
- $\sqrt{x+2}+\sqrt{4-x^2} > 0$
- $\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{5x}$
- $\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x} > x-1$
- $\sqrt{x+4} < \sqrt[3]{x+8}$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto
Strategia

Un metodo abbastanza meccanico per risolvere equazioni e disequazioni con valori assoluti consiste nel

- suddividere la retta dei numeri reali in tanti intervalli a due a due disgiunti su cui gli argomenti dei valori assoluti mantengono lo stesso segno,
- su tali insiemi eliminare il valore assoluto utilizzando la definizione,
- risolvere le risultanti equazioni o disequazioni relativamente ad ogni insieme,
- alla fine unire le soluzioni.

Più difficile da spiegare che a farsi!

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

Grafico della funzione valore assoluto

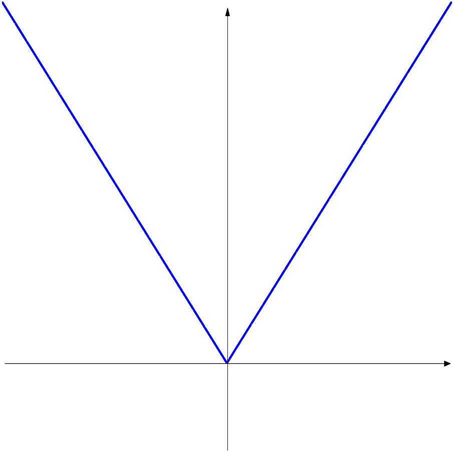


Figura: Grafico della funzione valore assoluto

Esercizi

Tutto sulle equazioni e disequazioni con valori assoluti!

Esercizi standard

- $|x-7|<2$
- $|2x-3|-x=2$
- $4-|x-5|\geq 2x-1$
- $|x^2-1|-x+5<0$
- $|2x-1|+|3x-2|\geq |10-x|+3$

e quelli un po' più complicati

- $|x-|2x-8||=4$
- $|x-|5-x||<x-1$
- $x-|2x+|x-1||<10-|x-3|$
- $(x-|x|)^2-(|x-1|-x)^2>2|x+1|$

A proposito, quanto fa $\sqrt{x^2}$?

Equazioni e disequazioni esponenziali

La funzione esponenziale

La funzione *esponenziale* è una legge della forma

$$y = a^x$$

con $a > 0$ e $a \neq 1$. Spieghiamo il significato di a^x.

- Se $x = n \in \mathbb{N}$ allora
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}.$$

  Le proprietà sono

1. $a^0 = 1$ *per convenzione,*
2. $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$,
3. $(a^m)^n = a^{mn}$.

Equazioni e disequazioni esponenziali

La funzione esponenziale

- Se $x = -1$ per convenzione

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

Allora a^x è definita per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e se $x = -n$ con $n \in \mathbb{N}$ si ha, per la proprietà 3,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- Se $x = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ non nullo per convenzione

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Allora a^x è definita per ogni $x \in \mathbb{Q}$ e se $x = \frac{m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ non nullo si ha

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Esempi:

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} \qquad \text{e} \qquad 5^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{125}}.$$

- Se $x \in \mathbb{R}$ si utilizza la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si fissa $q \in \mathbb{Q}$ che “ben approssima” x e quindi si afferma che a^q approssima a^x. Ad esempio, poiché $\pi \sim 3,14$ allora

$$2^{\pi} \sim 2^{3,14} = 2^{\frac{314}{100}} = \sqrt[100]{2^{314}}.$$

Allora le funzioni esponenziali, per le precedenti convenzioni, sono ben definite su tutto $\mathbb{R}$.

Equazioni e disequazioni esponenziali

La funzione esponenziale

La legge esponenziale a^x gode delle seguenti importantissime proprietà (fondamentali per risolvere equazioni e disequazioni):

(E1) *$a^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $y > 0$ l'equazione*

$$y = a^x$$

ha una soluzione,

(E2) *risulta iniettiva (e quindi per ogni $y > 0$ l'equazione*

$$y = a^x$$

ha una <u>sola</u> soluzione),

(E3) *per quanto riguarda la monotonia*

- *è decrescente se $a \in (0, 1)$,*
- *è crescente se $a > 1$,*

(E4) *risulta convessa (anche se a noi non interesserà).*

Equazioni e disequazioni esponenziali

Il grafico della funzione esponenziale

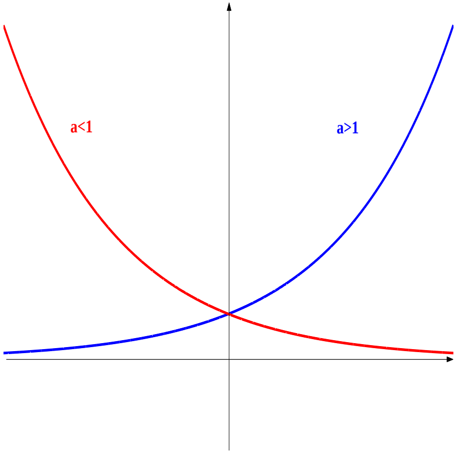


Figura: Grafici di funzioni esponenziali

Equazioni e disequazioni esponenziali

Strategia

Non esistono tecniche standard per risolvere equazioni esponenziali e spesso dovremo utilizzare le proprietà della legge esponenziale.
Iniziamo con dei semplici esercizi.

- $3^x = 9^4$
- $2^{x-1} = \frac{1}{4}$
- $3^{x^2-x} = 9^{x+2}$
- $3^{x+9} > 27$
- $2^{x+1} - 2^{x-1} > 6$

Ed ora risolviamo la seguente equazione

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$$

Equazioni e disequazioni esponenziali
Strategia

Non esistono tecniche standard per risolvere equazioni esponenziali e spesso dovremo utilizzare le proprietà della legge esponenziale. Iniziamo con dei semplici esercizi.

- $3^x = 9^4$
- $2^{x-1} = \frac{1}{4}$
- $3^{x^2-x} = 9^{x+2}$
- $3^{x+9} > 27$
- $2^{x+1} - 2^{x-1} > 6$

Ed ora risolviamo la seguente equazione

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 20 = 0$$

Per quale x si ha $2^x = 5$?

Equazioni e disequazioni logaritmiche

La funzione logaritmica

Così come hanno inventato il simbolo $\sqrt[3]{2}$ per indicare quel numero (esistente) che elevato alla 3 fornisce come risultato 2 (cioè $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$), allo stesso modo Eulero a meta del ’700 creò il simbolo per l’operazione logaritmo che era stata introdotta da Nepero nel 1614.

Il logaritmo di un numero x in una data base a è l’esponente al quale la base deve essere elevata per ottenere il numero stesso. Cioè

$$y = \log_a x \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^y = x.$$

Quindi

$$\log_2 8 = 3 \qquad \log_3 1 = 0 \qquad \log_5 \frac{1}{25} = -2 \qquad \log_7 7 = 1$$

ed inoltre

$$2^x = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \log_2 5.$$

L'operazione $\log_a$ è l'operazione inversa dell'esponenziale. Poiché $x = a^y$ è sempre strettamente positivo, di conseguenza l'operazione $\log_a$ si può fare solamente su numeri strettamente positivi.

Abbiamo individuato i tre capisaldi del campo di esistenza

- *In presenza di frazioni il denominatore deve essere $\neq 0$.*
- *In presenza di radici di indice pari l'argomento della radice deve essere ≥ 0*
- *In presenza di logaritmi l'argomento del logaritmo deve essere > 0.*

Le proprietà sono

1. $\log_a 1 = 0$,
2. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ *se* $x, y > 0$,
3. $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$ *se* $x > 0$.

Conseguenza dei punti 2 e 3 è

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \text{se } x, y > 0.$$

Domanda: provate a scrivere delle formule per

$$\log_a xy \qquad \text{e} \qquad \log_a \frac{x}{y}$$

quando $x, y < 0$.

Le basi più comunemente utizzate per i logaritmi sono

- base 10 (logaritmi decimali) e spesso si scrive Log.
- base e (logaritmi naturali) e spesso si scrive ln.

Ma quanto è (all'incirca) $\log_2 5$?. Vale la seguente formula del cambiamento di base

Se a, b sono due basi (quindi > 0 e $\neq 1$) allora

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \qquad \forall x > 0$$

Infine la funzione $y = \log_a x$ risulta

- iniettiva, crescente e concava se $a > 1$,
- iniettiva, descrescente e convessa se $0 < a < 1$.

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Il grafico della funzione logaritmica

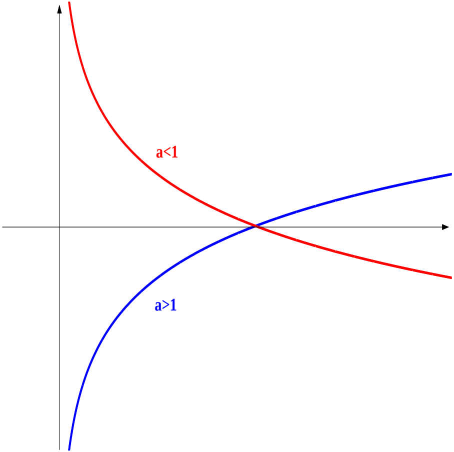


Figura: Grafici di funzioni logaritmiche

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Un po' di calcolo con i logaritmi

Calcoliamo

$$\log_2 \sqrt{2} \qquad \log_3 \frac{1}{\sqrt[5]{27}} \qquad \log_a a^x \qquad a^{\log_a x}$$

Semplificare le seguenti espressioni

$$\log_2 \frac{12}{25}, \qquad \log_{10} \frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{15}}$$

Calcolare, in base 10 i seguenti logaritmi

$$\log_3 11 \qquad \log_2 10$$

Ed ora passiamo alle equazioni e disequazioni.

- $\log_3(5 - 2x) = 2$
- $\log_2(x - 2) - \log_2(x - 10) = 1$
- $2\log_3(x - 4) = \log_3(x - 2)$
- $\log_2 x^2 + \log_2^2 x = 0$
- $\log_2(x + 1) + \log_2(11 - x) - \log_2(x^2 + 19) = 0$
- $\log_3(3x - 4) \leq \log_3(12 - 5x)$
- $\log_{1/2} x + \log_{1/2}(3 - x) \geq 1$
- $\log_2 x - \log_4(x + 3) < 1$
- $\log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 > 0$
- $\log_2(1 - \log_2 x) < 0$

Equazioni e disequazioni: di tutto un po'!

Un assortimento di disequazioni

1. $$\frac{x\log_2 x}{|x-2|-x}<0$$
2. $$\frac{\log_2(1+|x^2-1|)}{2^x-4}\geq 0$$
3. $$(x-3)\log_2\left(\frac{x-1}{11-2x}\right)>0$$
4. $$\sqrt{3^x-9^x}<3^x$$
5. $$|\log_2(x+1)-1|+\log_2|x-1|\geq 1$$
6. $$|2^x-8|+|1-4^x|<10$$
7. $$\frac{2-\sqrt{\log_2 x}}{10x-x^2}<0$$
8. $$\log_x(3x-2)<2$$

Sistemi di equazioni e disequazioni

Risolvere un sistema di equazioni e/o disequazioni significa determinare l’insieme delle soluzioni di ogni singola equazione/disequazione e successivamente farne l’intersezione, cioè determinarne la parte comune.
Provate a risolvere dei sistemi formati da alcune delle disequazioni della slide precedente.

Equazioni con due variabili

Introduzione

Cosa succede quando le variabili di una equazione sono due? Ad esempio l'equazione

$$x^2 - xy + y^3 = 1$$

ha tante soluzioni come

- $x = 0$ e $y = 1$,
- $x = 1$ e $y = 1$,
- $x = 1$ e $y = 0$,
- $x = 1$ e $y = -1$,
- $x = -1$ e $y = 0$,
- $x = -1 - \sqrt{10}$ e $y = -2$,
- $x = -1 + \sqrt{10}$ e $y = -2$.

Come fare per poterli scrivere tutti?

Il piano cartesiano
Definizioni

All'inizio del 1600 René Descartes e Pierre de Fermat idearono il piano cartesiano per poter risolvere in maniera semplificata problemi di geometria euclidea.
Il *piano cartesiano* è costituito da:

- l'asse delle *ascisse* che costituisce la retta di riferimento ed è caratterizzata dalla lettera x,
- l'asse delle *ordinate* che costituisce la retta ortogonale alla retta di riferimento ed è caratterizzata dalla lettera y,
- l'*origine* che è il punto nel quale le due rette si intersecano.

Un generico punto si può quindi esprimere scrivendo (x, y) ed infine il piano cartesiano viene suddiviso in quattro regioni denominate *quadranti*.

Dati due punti $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ allora

- il punto medio M del segmento di estremi A_1 e A_2 ha coordinate

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- la distanza tra il punto A_1 ed il punto A_2 è

$$\operatorname{dist}(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

In particolare la distanza di un punto $A = (x, y)$ dall'origine $O = (0, 0)$ è

$$\operatorname{dist}(A, O) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

che si chiamerà *norma* di A e si indicherà $\|A\|$.

Le equazioni polinomiali

Introduzione

Ed ora studiamo le equazioni polinomiali in due variabili:

- quelle di primo grado

$$ax + by + c = 0$$

  il cui insieme di soluzioni risulterà una *retta*,

- quelle di secondo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

  il cui insieme di soluzioni risulterà una *conica*.

Le soluzioni dell'equazione

$$ax + by + c = 0$$

formano una retta nel piano cartesiano e l'equazione prende il nome di *equazione della retta in forma implicita*. Ovviamente a e b non possono essere contemporaneamente nulli,

- se $a = 0$ otteniamo la retta $y = -\frac{c}{b}$ che risulta essere parallela all'asse delle x,
- se $b = 0$ otteniamo la retta $x = -\frac{c}{a}$ che risulta essere parallela all'asse delle y.

In particolare l'asse delle ascisse è la retta $y = 0$ mentre l'asse delle ordinate è la retta $x = 0$.

- Se $b \neq 0$, è possibile mettere in evidenza la y ottenendo
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$
- Se $a \neq 0$, è possibile mettere in evidenza la x ottenendo
$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$$

Le due espressioni prendono il nome di *equazione della retta in forma esplicita*. La prima forma esplicita (che risulta più comune ed usata) si scrive solitamente usando le lettere m e q

$$y = mx + q$$

dove abbiamo le relazioni

$$m = -\frac{a}{b} \qquad \text{e} \qquad q = -\frac{c}{b}$$

Le rette

Formule

Il coefficiente m prende il nome di *coefficiente angolare* della retta ed indica la pendenza della retta.

Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2), con $x_1 \neq x_2$, due punti a caso della retta $y = mx + q$; allora

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{(mx_1 + q) - (mx_2 + q)}{x_1 - x_2} = m$$

Quindi

- $m > 0$ *se e solo se la retta è crescente,*
- $m < 0$ *se e solo se la retta è decrescente.*

Le rette

Formule

- Due rette aventi coefficienti angolari m_1 e m_2 sono
  - parallele se e solo se $m_1 = m_2$,
  - perpendicolari se e solo se $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- Dato un punto $A = (x_0, y_0)$ ed una inclinazione m allora

$$y = y_0 + m(x - x_0)$$

  rappresenta l'equazione della retta passante per A ed avente inclinazione m.
- Dati due punti $A_1 = (x_1, y_1)$ e $A_2 = (x_2, y_2)$ allora

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

  rappresenta l'equazione della retta passante per A_1 e A_2.

Le rette

Formule

- Data la retta r di equazione $ax + by + c = 0$ ed il punto $A = (x_0, y_0)$, la distanza di A dalla retta risulta
$$\mathrm{dist}\,(r, A) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$
- Come conseguenza, date due rette $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ non parallele, le due bisettrici degli angoli formati dall'intersezione delle due rette sono
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$
e
$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Le coniche

Introduzione

L'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

formano una conica e per classificarle si analizza la matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

- Se $\det A = 0$ la conica è degenere e può essere
  - due rette,
  - un punto (intersezione di due rette complesse),
  - l'insieme vuoto (due rette complesse parallele);
- se $\det A \neq 0$ la conica è nondegenere e può essere
  - un'ellisse (eventualmente complessa) se $4ac - b^2 > 0$,
  - una parabola se $4ac - b^2 = 0$,
  - un iperbole se $4ac - b^2 < 0$.

Le coniche

Introduzione

Andiamo sul sito `wolframalpha` e controlliamo le seguenti coniche

- $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$
- $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$
- $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
- $x^2 - xy - 2y^2 - 2x + 4y = 0$
- $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
- $4x^2 + y^2 - 4x - 4y + 5 = 0$
- $4x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ (cosa sarà? Due rette parallele complesse oppure un'ellisse complessa?)

Ed ora studiamo particolari coniche.

Ellisse

Introduzione

Un'ellisse è il luogo geometrico dei punti $P = (x, y)$ del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi (detti fuochi) $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$ è costante $2a$, cioè

$$dist\,(P, F_1) + dist\,(P, F_2) = 2a$$

Se indichiamo con $2c = \text{dist}\,(F_1, F_2)$ la distanza tra i due fuochi si ha

- a è la lunghezza del semiasse maggiore dell'ellisse,
- $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ è la lunghezza del semiasse minore dell'ellisse,
- $e = \frac{c}{a} \in [0, 1]$ indica l'*eccentricità* dell'ellisse:
  - se $e = 0$ l'ellisse è un cerchio,
  - se $e = 1$ l'ellisse è un segmento di estremi F_1 e F_2.

Ellisse

Rappresentazione sul piano cartesiano

L'equazione canonica dell'ellisse si ottiene ponendo i fuochi sull'asse delle ascisse ed equidistanti dall'origine; quindi se $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ l'equazione dell'ellisse risulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se avessimo messo i fuochi sull'asse delle ordinate avremmo dovuto scambiare a e b. Quindi l'equazione generica dell'ellisse risulta

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Altre formule per l'ellisse

- l'area racchiusa da un ellisse è $\pi \cdot \alpha \cdot \beta$
- la retta tangente all'ellisse nel punto $P = (x_0, y_0)$ ha equazione

$$\frac{x_0}{\alpha^2}x + \frac{y_0}{\beta^2}y = 1$$

Circonferenza

Rappresentazione sul piano cartesiano

La circonferenza è un particolare ellisse in cui i due fuochi coincidono con il centro $C = (x_0, y_0)$ e la distanza dal fuoco (centro) prende il nome di raggio e si indica con r. L'equazione della circonferenza risulta

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Sviluppando i calcoli si ottiene la forma canonica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

dove

- $\alpha = -2x_0$
- $\beta = -2y_0$
- $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

Circonferenza

Rappresentazione sul piano cartesiano

Quindi, partendo dalla forma canonica della circonferenza

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

si ricava che

- il centro $C = (x_0, y_0)$ è dato da

$$x_0 = -\frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad y_0 = -\frac{\beta}{2}$$

- il raggio è

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$$

Parabola
Formule

Una parabola è il luogo geometrico dei punti $P = (x, y)$ del piano la cui distanza da un punto fisso (detto fuoco) $F = (x_0, y_0)$ è uguale alla distanza dalla retta fissata r, detta direttrice, cioè

$$dist(P, F) = dist(P, r)$$

L'equazione canonica della parabola si ottiene fissando r parallela all'asse delle ascisse $y = m$:

$$y = ax^2 + bx + c$$

dove

$$a = \frac{1}{2(y_0 - m)} \qquad b = -\frac{x_0}{y_0 - m} \qquad c = \frac{x_0^2 + y_0^2 - m^2}{2(y_0 - m)}.$$

Parabola

Formule

Viceversa, partendo dall'espressione

$$y = ax^2 + bx + c$$

si ottengono le seguenti formule inverse

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1+\Delta}{4a}$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$. Inoltre il vertice ha coordinate

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Infine la parabola è

- convessa se e solo se $a > 0$,
- concava se e solo se $a < 0$.

Parabola

Formule

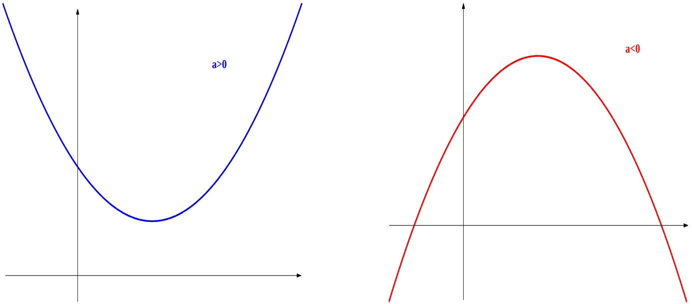


Figura: Grafici di una parabola convessa $a > 0$ e di una concava $a < 0$

Un'iperbole è il luogo geometrico dei punti $P = (x, y)$ del piano per i quali la differenza delle distanze, in valore assoluto, da due punti fissi (detti fuochi) $F_1 = (x_1, y_1)$ e $F_2 = (x_2, y_2)$ è costante $2a$, cioè

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a$$

L'equazione canonica dell'iperbole si ottiene ponendo i fuochi sull'asse delle x ed equidistanti dall'origine; quindi se $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ l'equazione risulta

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Iperbole

Formule

Ponendo $\alpha^2 = a^2$ e $\beta^2 = c^2 - a^2$ si ottiene

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Gli asintoti dell'iperbole sono

$$y = \pm\frac{\alpha}{\beta}x$$

L'iperbole si dice equilatera se i due asintoti sono ortogonali e questo avviene se e solo se $\alpha^2 = \beta^2$. Ruotando di 45° in senso antiorario la figura, i fuochi si posizioneranno sulla bisettrice del primo e del terzo quadrante e l'equazione dell'iperbole risulta

$$xy = k$$

dove $k = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}$

Le *funzioni trigonometriche* principali sono: *seno, coseno* e *tangente*.

Data la circonferenza unitaria di centro l'origine, ogni punto P su di essa individua un angolo α (misurato in radianti) formato dal raggio per P e dalla semiretta positiva delle ascisse. Si chiama

- $\cos\alpha$ *l'ascissa di P,*
- *sen* α *l'ordinata di P,*
- *tg* α *l'ordinata del punto Q dato dall'intersezione del prolungamento del raggio con la retta tangente alla circonferenza nel punto* $(1, 0)$.

Cenni di trigonometria

Funzioni trigonometriche

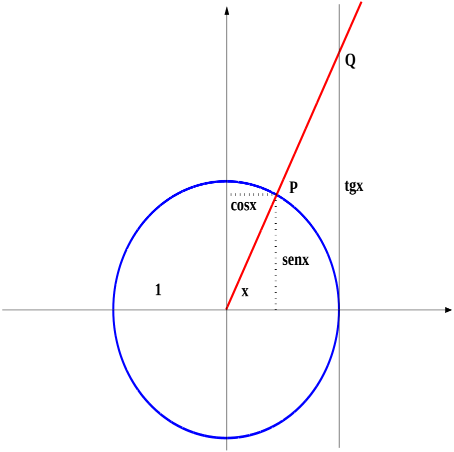


Figura: Le tre funzioni trigonometriche

Si dimostrano facilmente le seguenti fromule fondamentali

- *I formula fondamentale:* $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$
- *II formula fondamentale:* $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

In generale il coefficiente angolare di una retta corrisponde alla tangente dell'angolo formato dalla retta e dal semiasse positivo delle ascisse. Inoltre valgono le seguenti formule di somma e sottrazione

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}
$$

Cenni di trigonometria

Altre formule (meno fondamentali!)

- Formule di duplicazione

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha \qquad \text{e} \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

- Formule di bisezione (valutate in quale quadrante cade $\frac{\alpha}{2}$ per poter scegliere il segno opportuno)

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \left|\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right| \qquad \text{e} \qquad \left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| = \left|\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right|$$

- Formule parametriche (dove $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ con $\alpha \neq \pi + 2k\pi$)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Cenni di trigonometria

Altre formule (meno fondamentali!)

- Formule di prostaferesi

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}$$

- Formule di Werner

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha\cos\beta &= [\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]/2\\
\cos\alpha\cos\beta &= [\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2\\
\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta &= -[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]/2
\end{aligned}$$

Teorema

In un triangolo rettangolo

- *un cateto coincide con l'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto,*
- *un cateto coincide con l'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente,*
- *un cateto coincide con l'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.*

Dal teorema deduciamo i seguenti importanti corollari.

Teorema (della corda)

In una circonferenza di raggio r una corda è uguale al prodotto del diametro per il seno dell'angolo alla circonferenza che insiste sulla corda.

Teorema (dei seni)

In un triangolo di lati a, b e c ed angoli rispettivamente opposti α, β e γ si ha

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Teorema (di Carnot)

In un triangolo di lati a e b, se γ è l'angolo tra loro compreso allora il quadrato costruito sul lato opposto vale

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Una funzione f si dice *periodica* di periodo $T > 0$ se, per ogni x si ha $f(x+T) = f(x)$. Allora

- $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ sono periodiche di periodo 2π;
- $\operatorname{tg} x$ è periodica di periodo π.

Cenni di trigonometria

Grafici delle funzioni sen x e cos x

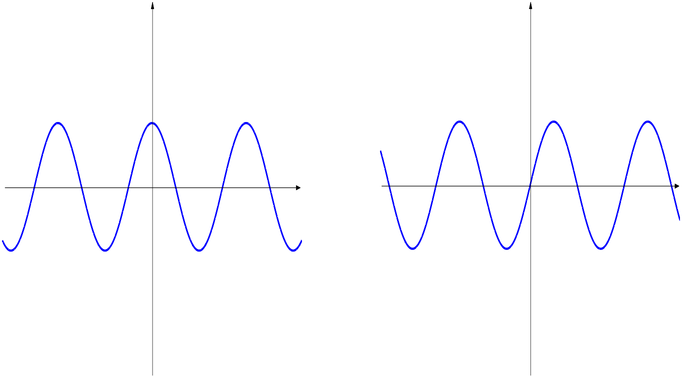


Figura: Grafici delle funzioni cos x e sen x

Cenni di trigonometria

Grafico della funzione tg x

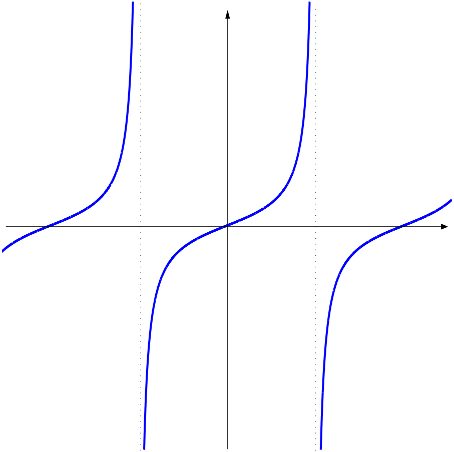


Figura: Grafico della funzione tg x

Altre funzioni trigonometriche meno famose sono:

- la secante $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
- la cosecante $\csc(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$
- la cotangente $\operatorname{cotg}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Invece sono importanti le seguenti funzioni inverse

- l'arcoseno $\operatorname{arcsen}(x)$: inversa di $\operatorname{sen} x$ sull'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$
- l'arcocoseno $\arccos(x)$: inversa di $\cos x$ sull'intervallo $[0, \pi]$
- l'arcotangente $\operatorname{arctg}(x)$: inversa di $\operatorname{tg} x$ sull'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$

Cenni di trigonometria

Equazioni e disequazioni: cenni

1. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$
2. $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
3. $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 2x$
4. $2\operatorname{sen}^2 x = 3\cos x$
5. $\operatorname{sen} x = \sqrt{3}\cos x$
6. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 1 + \cos x(\cos x + 1)$
7. $\cos 2x - \operatorname{sen} x = 0$
8. $\operatorname{sen}^2 x > \frac{1}{2}$
9. $\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x - \sqrt{3} < 0$

Le funzioni

Introduzione

L'oggetto che maggiormente studierete nel corso di analisi è la funzione.

Una funzione *è un "meccanismo" che associa:*

- *ad ogni valore dell'input (o variabile indipendente),*
- *<u>uno e un solo</u> valore dell'output (o variabile dipendente).*

Indichiamo con

- $\mathbb{X} = \{$insieme dei possibili input$\}$
- $\mathbb{Y} = \{$insieme dei possibili output$\}$.

Definiamo funzione *da* $\mathbb{X}$ *in* $\mathbb{Y}$ *una "legge di corrispondenza" che ad ogni* $x \in \mathbb{X}$ *associa un* $y \in \mathbb{Y}$ *e si scrive*

$$f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$$

L'insieme $\mathbb{X}$ *si dice* dominio *mentre* $\mathbb{Y}$ *si dice* codominio *della funzione.*

Le funzioni

Alcune definizioni

Sia $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ una funzione.

- Se un elemento x viene "portato" da f in un elemento y scriviamo $y = f(x)$. L'elemento y si dice *immagine* di x tramite la legge f e x si dice *controimmagine* di y tramite f.
- L'*immagine di* $\mathbb{X}$ *tramite* f è

$$f(\mathbb{X}) = \{y \in \mathbb{Y} \ : \ \exists x \in \mathbb{X} \text{ per cui } f(x) = y\}$$

- Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{Y}$ indichiamo con

$$f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{X} \ : \ f(x) \in A\}$$

l'*immagine inversa* di A tramite f. Se $A = \{y\}$ per un certo $y \in \mathbb{Y}$ allora $f^{-1}(\{y\})$ si scrive semplicemente $f^{-1}(y)$ cioè

$$f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{X} \ : \ f(x) = y\}.$$

Le funzioni

Grafico

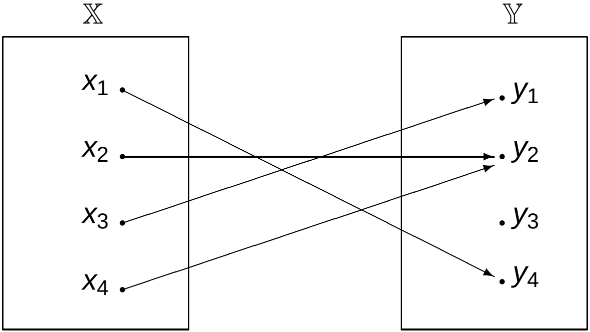
Il grafico *di una funzione* $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *è l'insieme*

$$\{(x, y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \ : \ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \ : \ x \in \mathbb{X}\}.$$

Affinché un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenga al grafico di f deve verificarsi che $x_0 \in \mathbb{X}$ e $y_0 = f(x_0)$.
Per visualizzare il grafico di una funzione si utilizza solitamente il diagramma di Eulero–Venn.

Le funzioni

Grafico



$f(x_1) = y_4$
$f(x_2) = y_2$
$f(x_3) = y_1$
$f(x_4) = y_2$

- L'immagine di f è $f(\mathbb{X}) = \{y_1, y_2, y_4\}$,
- la controimmagine di y_2 è $f^{-1}(y_2) = \{x_2, x_4\}$,
- Il grafico di f è $G(f) = \{(x_1, y_4), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_2)\}$.

Le funzioni

Proprietà

Una funzione $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ si dice

- *iniettiva* se

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} \ \text{ con } \ x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

  cioè ogni elemento $y \in \mathbb{Y}$ è raggiunto al massimo una volta;
- *suriettiva* se

$$\forall y \in \mathbb{Y}, \ \exists x \in \mathbb{X} \ \text{ tale che } \ y = f(x)$$

  cioè tutti gli elementi di $\mathbb{Y}$ sono raggiunti almeno una volta;
- *biettiva* (oppure *invertibile*) se risulta sia iniettiva sia suriettiva.

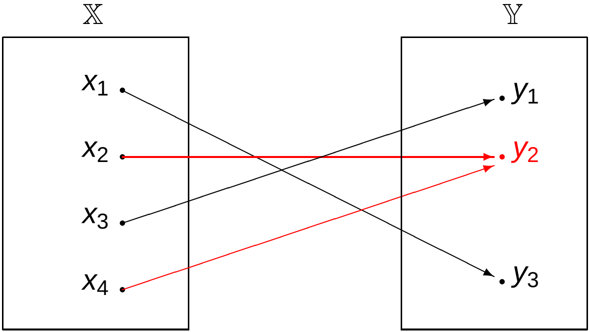
Se $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ è biettiva, viene individuata una nuova funzione $g : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{X}$ tale che

$$g(y) = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = y$$

La funzione g si chiama *funzione inversa* e si indica f^{-1}.

Le funzioni

Funzione suriettiva



$f(x_1) = y_3$

$f(x_2) = y_2$

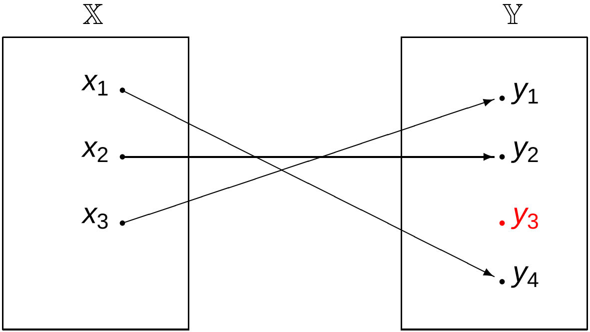
$f(x_3) = y_1$

$f(x_4) = y_2$

La funzione f è suriettiva poiché ogni punto del codominio è raggiunto da almeno una freccia ma non è iniettiva poiché y_2 è raggiunto da più di una freccia.

Le funzioni

Funzione iniettiva



$f(x_1) = y_4$

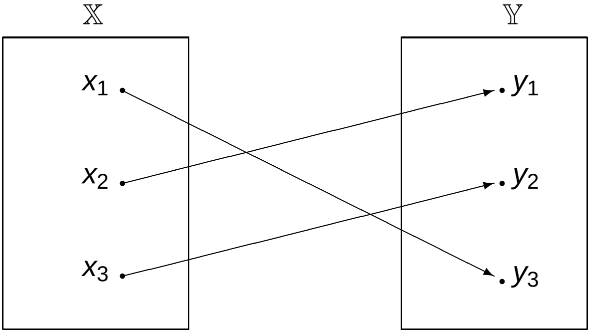
$f(x_2) = y_2$

$f(x_3) = y_1$

La funzione f è iniettiva poiché i punti del codominio sono raggiunti al più da una freccia ma non è suriettiva poiché y_3 non è raggiunto da nessuna freccia.

Le funzioni

Funzione biettiva



$$f(x_1) = y_3$$

$$f(x_2) = y_1$$

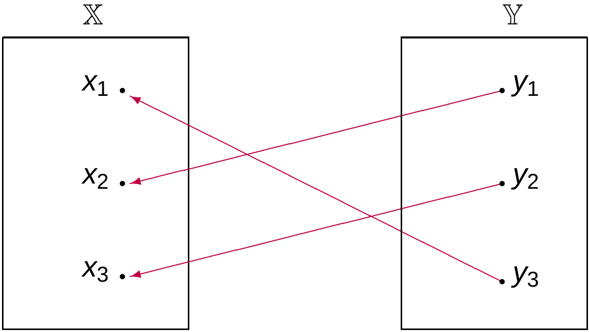
$$f(x_3) = y_2$$

La funzione f è sia suriettiva (ogni punto del codominio è raggiunto da almeno una freccia) sia iniettiva (ogni punto del codominio raggiunto da al più una freccia); quindi f è biettiva cioè invertibile.

Le funzioni

Funzione inversa

Per determinare il grafico della funzione inversa è sufficiente invertire le frecce dall'insieme $\mathbb{Y}$ all'insieme $\mathbb{X}$.



$$f^{-1}(y_1) = x_2$$

$$f^{-1}(y_2) = x_3$$

$$f^{-1}(y_3) = x_1$$

Di particolare interesse sono le funzioni $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ dove $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}$ e $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{R}$. Esse sono dette *funzioni reali di una variabile reale*. La cosa "bella" di queste funzioni è che il loro grafico si può rappresentare su un piano cartesiano.

Data una legge f su $\mathbb{R}$ chiamiamo campo di esistenza *il più grande insieme di $\mathbb{R}$ per cui tale legge è ben definita e lo indichiamo con $CE(f)$.*

A volte, per abuso di linguaggio, si usa dire "CE di una funzione". L'espressione non è esatta in quanto, quando parliamo di funzione, vuol dire che il dominio è già deciso a priori: in ogni caso tolleriamo tale abuso di linguaggio.

Le funzioni

Monotonia

Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice

- *strettamente crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \text{ con } \ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

- *non–decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \text{ con } \ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

- *strettamente decrescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \text{ con } \ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

- *non–crescente* se

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \text{ con } \ x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

La funzione f si dice

- *strettamente monotona* se è strettamante crescente oppure strettamente decrescente;
- *monotona* se è non–decrescente oppure non–crescente.

Osservazione

Se la funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *è strettamente monotona allora è iniettiva mentre il viceversa è generalmente falso.*

Le funzioni

Operazioni sui grafici di una funzione

Supponiamo di conoscere il grafico di una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, allora

- il grafico di $2f(x)$ è...
- il grafico di $-f(x)$ è...
- il grafico di $f(x) + 2$ è...
- il grafico di $f(-x)$ è...
- il grafico di $f(2x)$ è...
- il grafico di $\frac{1}{f(x)}$ è...
- il grafico di $2^{f(x)}$ è...
- il grafico di $\log_2 f(x)$ è...
- il grafico di $\sqrt{f}$ è...